

Por cancelaciones sucesivas (propiedad telescópica del producto) podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} \cdot \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{\binom{n-k+1}{1}}{\binom{n-k}{0}} \cdot \binom{n-k}{0} = \\
 &= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{1} \cdot 1 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \\
 &= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{[(n-k)(n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1][k(k-1) \cdot \dots \cdot 1]} = \\
 &= \frac{n!}{(n-k)! k!}, \quad 0 \leq k \leq n
 \end{aligned}$$

De lo anterior, la definición siguiente parece razonable.

DEFINICIÓN 1: Sean $k, n \in N_0$, $0 \leq k \leq n$. Definimos el número

$\binom{n}{k}$ que leeremos *n sobre k* por:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

NOTA: Se puede observar que con esta definición se tiene que:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! 0!} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! n!} = 1.$$

Las siguientes propiedades se demuestran fácilmente

TEOREMA 1 : Sean $k, n \in N_0$, $k \leq n$. Entonces

$$(1) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (\text{Regla de formación del triángulo de Pascal})$$

$$(2) \quad \binom{n}{k} \text{ es un entero no negativo}$$

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{simetría del triángulo de Pascal})$$

Ahora, nuestra conjetura sobre la fórmula general (3) y sobre los coeficientes binomiales se resume el siguiente teorema.

formas distintas.

2) Si $k=n$, entonces

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

$$3) C_k^n \cdot k! = V_k^n \Rightarrow C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}.$$

Obtenemos, así, una útil interpretación de los coeficientes binomiales.